Hans-Jürgen ELSCHENBROICH, Düsseldorf

Dynamische Visualisierung durch neue Medien

Der Mathematikunterricht ist in der Krise. TIMSS und PISA haben (nur) das Verdienst, dies in den Focus des öffentlichen Interesses gerückt zu haben. Die Befunde selbst sind nicht überraschend und Anregungen seitens der Mathematikdidaktik sind jahrzehntelang überhört worden. In der öffentlichen Diskussion gibt jetzt es typische Überreaktionen in Bezug auf die (neuen) Medien: ‚*Die Schüler sollen erst mal ordentlich rechnen lernen, bevor sie den Taschenrechner nutzen*'.

Der Einsatz von Medien hat im Mathematikunterricht eine lange Tradition: Papier und Stift, Tafel und Kreide, Zirkel und Lineal/Geodreieck, Schere und Klebstoff, mathematische Modelle, stochastische Tafelwerke, Formelsammlungen, Logarithmentafel und Rechenschieber, Taschenrechner werden seit langem genutzt. Graphiktaschenrechner, Computer und (mathematische) Software sind hinzugekommen, haben teils die alten Medien ersetzt und teils neue Möglichkeiten eröffnet. Diese beruhen letztlich darauf, in sehr kurzer Zeit sehr viele Rechenoperationen durchführen zu können. Entscheidend für den Qualitätssprung ist, dass dadurch vorher nicht gekannte Möglichkeiten zur Visualisierung und zur Interaktion eröffnet werden.

Veranschaulichung und Visualisierung

Jahrhundertelang war Lernen und Lehren von Sprache dominiert und wurde als ein Wissenstransfer vom Wissenden (= Sender) zum Lernenden (= Empfänger) verstanden und organisiert. Ansätze zu einer Betonung der Anschauung als Gegenposition zur verbalistischen Methode gab es schon bei Pestalozzi und Herbart. Der Begriff der Anschauung berücksichtigt einerseits schon die Bedeutung der Bilder, des Visuellen, ist andererseits aber noch dem traditionellen Verständnis von Lehren verhaftet, was auch in dem Wort *Ver*anschaulichung zu Ausdruck kommt: Der Lehrende ist aktiv, der Lernende ist Rezipient.

Eine erweiterte Sicht kommt mit dem Begriffswechsel zur Visualisierung zum Tragen, wegweisend waren dabei die Klagenfurter Workshops zur ‚Visualisierung in der Mathematik' in der 80er Jahren. Visualisierung stellt etwas bildhaft dar, das nicht bildhaft ist, ergänzt oder ersetzt einen Sachverhalt in der Wortsprache durch eine Bildsprache. In didaktischem Sinne ist Visualisierung mehr als bloße Veranschaulichung und Bebilderung, es ist damit eine aktive Rolle der Lernenden verbunden.

„*Ein visuell wahrnehmbares Objekt (dazu zähle ich auch Bilder am Fernsehschirm u. ä.) ist also keineswegs per se Visualisierungsmittel, sondern wird es erst durch die (letztlich geistige) Tätigkeit des Menschen.*" (DÖRFLER 1984)

Beispiele zur Veranschaulichung

Geeignete Beispiele zur Veranschaulichung mathematischer Sachverhalte sind schon lange bekannt.

1. Bei der ersten Binomischen Formel tritt immer wieder bei Schülern das Problem auf, dass $(a + b)^2$ zu $a^2 + b^2$ umgeformt wird. Ein erneuter algebraischer Beweis korrigiert den Fehler zwar kurzfristig, räumt ihn aber in der Regel dauerhaft nicht aus.

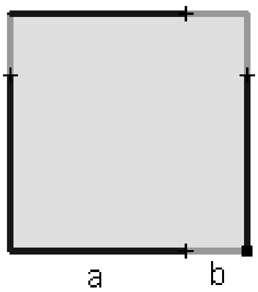

Abb. 1a

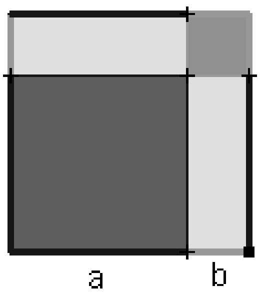

Abb. 1b

Diese beiden Bilder zeigen unmittelbar, dass ein Quadrat der Seitenlänge a+b in vier Teilflächen unterteilt werden kann, nämlich in die Quadrate a^2, b^2 und in zwei Rechtecke $a \cdot b$. Damit enthält das rechte Bild in Abb. 1b die Formel und gleichzeitig die Begründung, es ist ein typischer ‚Siehe'-Beweis. (ARNHEIM 1972*, mit Verweis auf Rousseau*)

2. Bei der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel ist meist die Richtung der Ungleichung in Vergessenheit geraten. Dies kann natürlich jedes Mal durch einige algebraische Umformungen geklärt werden.

In nebenstehender Figur ergibt sich für ein Dreieck in einem Thaleskreis über x+y, dass der Radius r mit der Länge $\frac{x+y}{2}$ offensichtlich größer gleich der Höhe h mit der Länge $\sqrt{x \cdot y}$ ist. Somit gilt $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$.

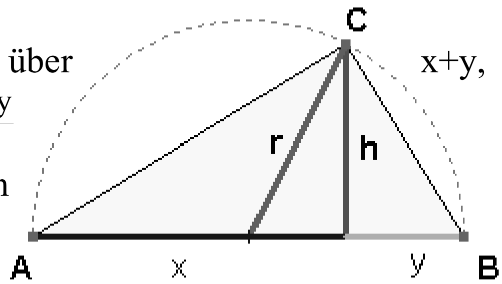

Abb. 2

Dieses Bild liefert wieder den Sachverhalt und die Begründung und bietet eine ganzheitliche Sicht auf die Ungleichung. Hier wird auch sehr deutlich, dass auch bei Veranschaulichungen Vorwissen erforderlich ist, sonst ‚sieht' man nichts. Ohne Kenntnisse über Kreisradius, Thaleskreis und Höhensatz ergibt sich nichts als die bloße optische Wahrnehmung verschiedener Strecken. (KAUTSCHITSCH 1989; NELSEN 1993)

Dynamik

Bewegungen und Bewegungsvorstellungen zu nutzen, ist keine Idee dieses Jahrhunderts. Zeichnungen, die Dynamik andeuten, finden sich u.a. bei KUSSEROW (1928), TREUTLEIN (1911) und schon bei CLAIRAUT (1775).

Bewegliche Zeichengeräte wie Ellipsenzirkel und Pantograph sind seit Jahrhunderten bekannt, die Gummifädengeometrie am Geobrett ist ein Vorläufer der dynamischen Geometrie, die Diaporama-Diaserien zeigten vorbereitete Bildfolgen, Unterrichtsfilme brachten bewegte Bilder ins Klassenzimmer und in den 50-er Jahren wurde gar ein mechanischer ‚Funktionenschieber' entwickelt.

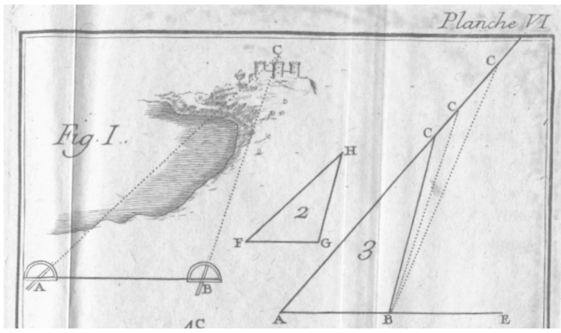

Abb. 3 CLAIRAUT. Élémens de Géométrie, Planche VI

Dennoch haben diese Ansätze den Unterricht nicht entscheidend geprägt. Sie waren aufwändig, oft teuer und selten. Sie blieben in Lehrerhand und versetzten die Schüler in eine passive Betrachterrolle.

Dynamik und Software

Dynamische Geometrie-Software, Tabellenkalkulation, Computeralgebra, Funktionenplotter, Java-Applets im Internet, Graphik-Taschenrechner sind demgegenüber problemloser einsetzbar und können vor allem zum Werkzeug in Schülerhand werden. Der Zugmodus bei der Geometriesoftware, die sofortige Neuberechnung aller Formeln und Aktualisierung von Diagrammen bei der Tabellenkalkulation, Schieberegler in Tabellenkalkulation, Computeralgebra und Funktionenplottern ermöglichen die Umsetzung von Dynamikvorstellungen. Diese laufen nicht mehr nur vor dem geistigen Auge desjenigen ab, der die Zusammenhänge verstanden hat und sie in innere Bilder umsetzen kann, sondern sind auf dem Bildschirm tatsächlich sichtbar und beeinflussbar. Dies eröffnet den Schülern neue Felder für Experimentieren und Explorieren, für systematische Untersuchungen der Frage ‚*Was passiert, wenn …*'.

Dynamische Visualisierung

Die Verbindung von Visualisierung und Dynamik durch Software liefert eine neue Qualität. Als Begriff ist *Dynamische* Visualisierung erst in den 90er Jahren in den USA aufgekommen, aber in kürzester Zeit gängig geworden.

Damit werden erfolgreich alte Ansätze zu Visualisierung und Dynamik realisiert, deren Umsetzung bislang zu aufwändig war. Als Werkzeug in Schülerhand wird die Schüleraktivität gestärkt, wird den Schülern der Rollenwechsel vom Betrachter zum Handelnden ermöglicht (wenn die Lehrer dies zulassen).

Die dynamische Visualisierung ist in verschiedenen *technischen* Arrangements fruchtbar einsetzbar (Lehrer-Laptop & Beamer, Computerraum, Handhelds/ Laptopklassen, Medienecken) und in verschiedenen *methodischen* Arrangements (Lehrerdemonstration, Einzelarbeit/ Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Stationenlernen, Freiarbeit).

Visuell-dynamisches Beweisen

Die dynamische Visualisierung bietet auch einen schülernahen Zugang zu geometrischen Beweisen. Findet formales Beweisen alter Prägung im Unterricht kaum noch statt, so bedeutet das nicht, dass man nun nur noch der Evidenz des Zugmodus erliegt. Visuell-dynamische Beweise sind präformale Beweise mit Software-Unterstützung (ELSCHENBROICH 2002). Sie bauen auf den Handlungen der Schüler auf, sie sind

- visuell: anschaulich, auf eine Zeichnung bezogen.
- dynamisch: keine einzelne starre Zeichnung, sondern eine ideale Zeichnung, eine Figur, durch den Zugmodus lebendig geworden.
- ein Beweis: eine nicht durch rationale Argumentationen zu erschütternde Antwort auf die Frage nach dem ‚Warum'.

Beispiele zur Dynamischen Visualisierung

Im Folgenden sollen einige Beispiele aus dem Unterricht vorgestellt und kommentiert werden, die auf vorbereiteten elektronischen Arbeitsblättern[1] basieren (ELSCHENBROICH 2001b) und die Problematik des geometrischen Programmierens umgehen.

1. **Inkreis**
   Zu jedem Punkt auf einer Winkelhalbierenden eines Dreiecks kann ein Kreis so konstruiert werden, dass er die Dreiecksseiten (bzw. deren Verlängerung) berührt. Wird im Zugmodus der Kreismittelpunkt auf der Winkelhalbierenden variiert, so wandert der Kreis aus dem Inneren des Dreiecks heraus und hat dabei genau eine Position[2], in der er auch die dritte Seite berührt, also Inkreis ist.

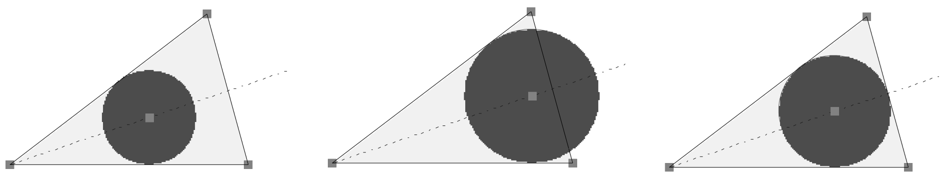

Abb. 4a – c

[1] Diese Beispiele kommen auf dem Papier nur ansatzweise zu Geltung. Sie können aber neben weiteren im Vortrag vorgestellten Beispielen im Internet heruntergeladen werden: www.mathe-werkstatt.de/web/download.htm

[2] Dabei wird ein Zwischenwertargument intuitiv und implizit genutzt, ohne schon Stetigkeit zu thematisieren.

Dies bietet eine dynamische Sichtweise auf den Sachverhalt, der sonst in statischer Weise formuliert wird (‚*In jedem Dreieck schneiden sich* ...’). Man erhält zunächst einen visuell-dynamischen Existenzbeweis. Wird das Vorgehen mit den anderen Winkelhalbierenden wiederholt, liefert das auch eine Idee für die Konstruktion des Inkreismittelpunktes. (Bender 1989, Elschenbroich/ Seebach 2002)

2. **Quadrate addieren/ Stuhl der Braut**
Es ist ein historisches Problem, Quadrate zu ‚addieren’, d.h. aus zwei Quadraten ein neues zu erzeugen. Bei zwei gleichgroßen Quadraten ist das einfach, bei ungleich großen aber nicht offensichtlich.

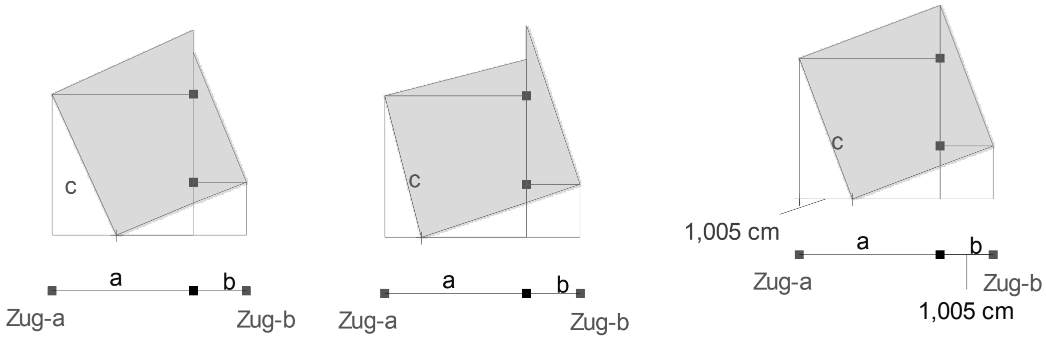

Abb. 5a – c

Sollen Schüler mit Schere und Papier die Zerteilung von zwei Quadraten durchführen, wissen sie zunächst nicht, wie sie zerteilen sollen. In der Regel ‚passen’ ihre Teile nicht zu einem neuen Quadrat zusammen. Durch eine geeignete Dynamisierung erhält man nach Abb. 5 eine Figur, die von selbst die Frage aufwirft, wann und warum die einzelnen Teile zu einem zu einem neuen Quadrat zusammenpassen. Das liefert blitzartig eine Beweisidee, dass nämlich ein Quadrat entsteht, wenn an der längeren Seite a die kürzere Seite b abgetragen wird. (Baptist 1997, Elschenbroich 2001a)

3. **Pantograph**
Der Storchenschnabel oder Pantograph ist ein ‚Alleszeichner’, ein seit Jahrhunderten bekanntes Gestänge zum Vergrößern oder Verkleinern von Bildern.

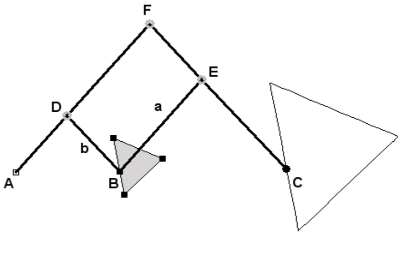

Abb. 6a

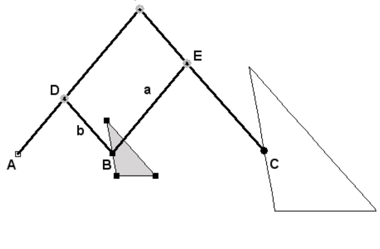

Abb. 6b

Mit einem mit DGS konstruierten Pantographen kann man die gleichen Effekte erzielen wie mit einem realen Gestänge. Ändert sich aber das Ausgangsbild, muss mit dem Gestänge neu gezeichnet werden. Bei einem DGS-Pantographen verändert sich jedoch mit der Variation der Urbild-Figur automatisch auch das Bild, das als Ortslinie/Spur erzeugt wurde.
Ebenso muss mit dem Gestänge neu gezeichnet werden, wenn der fixierte Punkt A anders positioniert wird. Auch hier verändert sich beim DGS-Pantographen das Bild automatisch, wenn A im Zugmodus bewegt wird.

Völlig neue Effekte kann man mit ‚schiefen' DGS-Pantographen erzielen. Dabei werden keine ähnlichen Bilder mehr erzeugt, die Abbildung ist nicht mehr geradentreu. Dies ist auch noch mit einem Gestänge realisierbar.

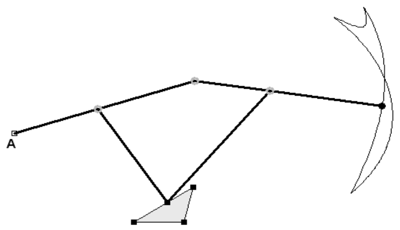

Abb. 6c

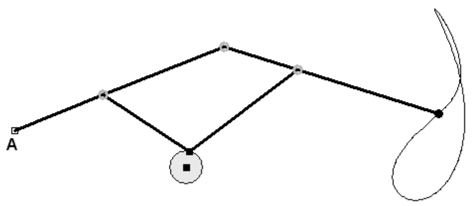

Abb. 6d

Mit einer DGS-Konstruktion kann man nun mit Schiebereglern die Proportionen dynamisch und kontinuierlich variieren und dabei gleich die Auswirkungen auf die Bildfiguren studieren – was bei realen Pantographen nicht möglich ist. (Elschenbroich/ Rechmann 2004)

4. **Rechteck im gleichschenkligen Dreieck**
Wird einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck wie in Abb. 7a ein Rechteck einbeschrieben, so ist dessen Umfang konstant, unabhängig von der Lage von D auf $\overline{AB}$.

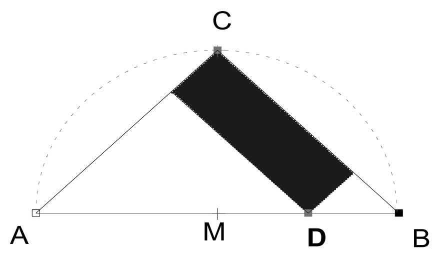

Abb. 7a

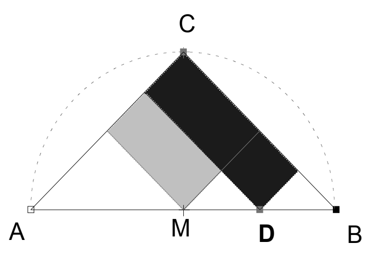

Abb. 7b

Der Grund ist schnell erkannt: Was an der einen Stelle umfangmäßig weggenommen wird, kommt an der anderen dazu (siehe Abb. 7b). Genauso erkennt man, dass bei nicht-gleichschenkligen Dreiecken der Umfang des Rechtecks nicht mehr invariant bleiben kann.

Dies kann man auch noch ohne dynamische Software einsehen. Aber mit DGS kann man, die Untersuchung weiter treiben:
Wie ändert sich bei gegebenem Dreieck der Umfang U in Abhängigkeit von D?
Was bewirkt dann die Veränderung der Gestalt des Dreiecks durch Variieren von C?
Die Erkenntnis, dass hier ein linearer Zusammenhang vorliegt (siehe Abb. 7c), wäre ohne dynamische Software Schülern nicht zugänglich.

Und was passiert, wenn man für den Umfang U nicht die Abhängigkeit von D, sondern vom Winkel α betrachtet? Open ended approach!

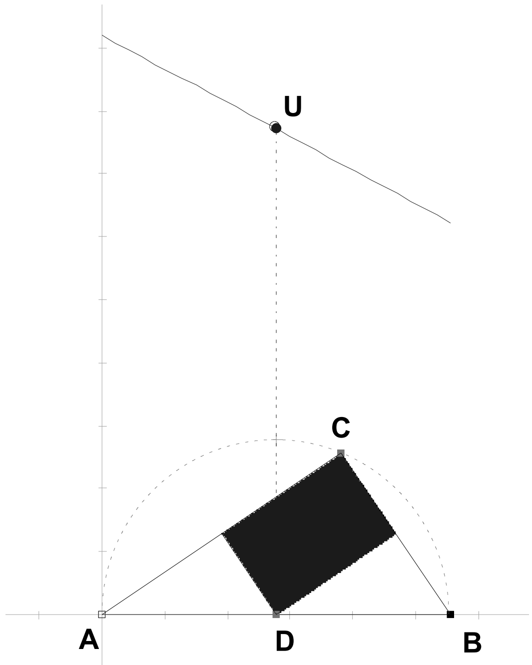

Abb. 7c

Bildungsstandards

Aus den Ergebnissen von TIMSS und insbesondere PISA erwuchs eine breite bildungspolitische Diskussion, die seitens der KMK zu kompetenzorientierten Bildungsstandards führte. Dort sind Ansätze zur dynamischen Visualisierung aufgenommen: die Schüler sollen „*Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln ... kennen und begreifen*" und „*Hilfsmittel, insbesondere elektronische Medien entsprechend sinnvoll*" einsetzen[3].
Die nordrhein-westfälischen Kernlehrpläne gehen in ihrer Umsetzung der Bildungsstandards einen Schritt weiter: Hier sollen die Schüler „*mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern, als geistige Schöpfungen verstehen und weiter entwickeln*" und „*klassische mathematische Werkzeuge und moderne elektronische Werkzeuge und Medien*" sachgerecht einsetzen und situationsangemessen auswählen[4]. Als elektronische Werkzeuge werden explizit und obligatorisch genannt: Taschenrechner, Dynamische Geometriesoftware, Tabellenkalkulation und Funktionenplotter.

Königsweg?

Dynamische Visualisierung bietet hervorragende Möglichkeiten für einen schüleraktiven, mediengestützten Mathematikunterricht, der manche formalen Hürden wenn nicht umgeht, doch durch visuelle Hilfen zugänglicher macht.

[3] http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf
[4] http://www.learn-line.nrw.de/angebote/kernlehrplaene/

Jedoch ist dies ist kein Königsweg zur ‚Mathematik auf Mausklick'. Wenn auch visuell gestützt, muss mathematisch experimentiert, vermutet, formuliert und begründet werden. Es ist Vorwissen nötig (‚*Das Auge schläft, bis der Geist es mit einer Frage weckt.*'), der Schüler braucht Begriffe und Kontext. Dynamische Visualisierung gibt Hilfen, nimmt Schülern aber nicht die eigene geistige Tätigkeit ab. Sie eröffnet Möglichkeiten (‚*Es kann dir jemand die Tür öffnen. Hindurch gehen musst du selbst.*').
Nicht mehr, aber auch nicht weniger.

Literatur

Arnheim, Rudolf (1972): Anschauliches Denken. DuMont, Köln.

Baptist, Peter (1997): Pythagoras und kein Ende. Klett, Stuttgart.

Bender, Peter (1989): Anschauliches Beweisen im Geometrieunterricht – unter besonderer Berücksichtigung von (stetigen) Bewegungen bzw. Verformungen. In: Kautschitsch/ Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Danckwerts, Rainer (1999): Dynamische Visualisierung und Mathematikunterricht: Ein Beispiel. In: Beiträge zum Geometrieunterricht 1999. Franzbecker, Hildesheim.

Dörfler, Willibald (1984): Qualität mathematischer Begriffe und Visualisierung. In: Kautschitsch/ Metzler (Hrsg.): Anschauung als Anregung zum, mathematischen Tun. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Elschenbroich, Hans-Jürgen/ Rechmann, Markus (2004): Pantographien. Erscheint in: MU 4/2004. Friedrich Verlag.

Elschenbroich, Hans-Jürgen/ Seebach, Günter (2002/2003): Dynamisch Geometrie entdecken. Klasse 7,8,9,10. Elektronische Arbeitsblätter. CoTec, Rosenheim.

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2002): Visuell-dynamisches Beweisen. In: mathematik lehren Heft 110. Friedrich Verlag.

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2001a): DGS als Werkzeug zum präformalen, visuellen Beweisen. In: Elschenbroich/ Gawlick/ Henn (Hrsg.): Zeichnung - Figur - Zugfigur. Franzbecker, Hildesheim.

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2001b): Lehren und Lernen mit interaktiven Arbeitsblättern. Dynamik als Unterrichtsprinzip. In: Herget/ Sommer (Hrsg.): Lernen im Mathematikunterricht mit neuen Medien. Franzbecker, Hildesheim.

Elschenbroich, Hans-Jürgen (2001c): Visuelles Lehren und Lernen.
In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001. Franzbecker, Hildesheim.

Kautschitsch, Hermann (1989): Wie kann ein Bild das Allgemeingültige vermitteln? In: Kautschitsch/ Metzler (Hrsg.): Anschauliches Beweisen. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Nelsen, Roger B. (1993): Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking. The Mathematical Association of America, USA.

Vom Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.