Neues Lernen/ Neue Medien – aber bitte mit Prüfung!

Hans-Jürgen Elschenbroich

Hauptvortrag auf der Tagung

Neues Lernen mit neuen Medien – Mathematikunterricht in der Zukunft.

Münster, 27. Mai 1999

Inhalt

Mathematik-Unterricht und Prüfungen

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen Mathematikunterricht und Leistungsüberprüfung. Lehrer, Eltern und Schüler wollen vorzeigbare Ergebnisse.
In Prüfungssituationen verschwinden dabei oft alle Fragen nach Sinn oder Anwendung.
Es geht um Kalkül und Kalkulierbarkeit. Was als nicht prüfungsrelevant eingestuft wird, versinkt in der Bedeutungslosigkeit.

Klausurnoten beeinflussen die Mathematiknote besonders stark (auch wenn die APO-GOSt eine gleichwertige sonstige Mitarbeit vorsieht).
Wer kennt nicht Fälle, in denen Schüler, die im Schriftlichen sehr gut stehen, im Mündlichen aber wenig oder nichts beitragen, eine viel bessere mündliche Note bekommen als Schüler, die mündlich genauso wenig beitragen und schriftlich schwach sind? Die schriftliche Note bekommt wegen ihrer besseren Überprüfbarkeit ein viel größeres Gewicht.

Soweit neue Medien in den Unterricht eindringen, wird dies zwangsläufig auch auf Prüfungen durchschlagen. Für uns stellt sich in dem Zusammenhang deswegen die Frage:

> **Welche Konsequenzen hat der Einsatz neuer Medien für Prüfungssituationen**, **sowohl mit als auch ohne direkten Computereinsatz?**

Untersuchungen von Abituraufgaben

Paradebeispiel für Prüfungssituationen sind Abiturklausuren. Systematische Untersuchungen von Abituraufgaben sind bisher Mangelware, es gibt Untersuchungen von Bauer zum bayerischen Zentralabitur 1971 – 1976 und von Wynands über das NRW-Abitur von 1978 bis 1993 (reformierte Oberstufe).
Beide benutzen die gleiche Klassifizierung in Routineaufgaben, Entschlüsselungsaufgaben und Denkaufgabe, die folgendermaßen untergliedert wurde[1]:

- **Routineaufgaben**
  M-Typ: Für die Lösung sind Gedächtnisleistungen (memory) und das Benutzen bekannter Verfahren erforderlich.
  E-Typ: Zusätzlich zu den Merkmalen des M-Typs muss eine Evaluation nach bekanntem Muster, d.h. auf Wissen aufgebautes routinemäßiges Prüfen, vorgenommen werden.
- **Entschlüsselungsaufgaben**
  C-Typ: Im Gegensatz zu M-Typ und E-Typ ist hierbei zusätzlich 'Cognition' gefordert, d.h. unmittelbares wieder-entdecken von früher erworbenen Einsichten.
  CP-Typ: Ein Lösungsschema ist nicht vollständig bekannt, kann aber durch bekannte Teilschemata aufgebaut werden ('convergent production').
- **Denkaufgaben**
  kD-Typ (konvergente Denkaufgabe): Die Aufgabe ist zwar durch 'konvergente' Informationen auf eine Lösung hin vorstrukturiert, das Lösungsschema muss jedoch mindestens teilweise neu entwickelt werden.

[1] Wynands, MiSch 11/1995, S. 625

dD-Typ (divergente Denkaufgabe): Ein 'offenes' Problem, das keine isolierte Fragestellung enthält und neues Denken erfordert.

Bauer und Wynands kommen zu folgenden Resultaten:

	Bauer	Wynands
Routineaufgaben	42 %	52 %
Entschlüsselungsaufgaben	56 %	47 %
Denkaufgaben	2 %	1 %

Man kann also im wesentlichen sagen:

> **Routineaufgaben und Entschlüsselungsaufgaben kommen im Abitur etwa gleichhäufig vor, Denkaufgaben praktisch gar nicht.**

Große Teile dieser Aufgabenstellungen könnten von CAS erledigt werden. Schnegelberger stellte in einer Untersuchung 1990 fest:
„Aus der Analyse der Abiturklausuren geht hervor, daß die geforderten Kompetenzen zu ca. 70 % im Leistungskurs und zu ca. 80 % im GK von jedem CAS formal übernommen werden können.[2]"

Dies führt konsequenterweise dazu, dass bei Einsatz neuer Medien sich auch die Prüfungsaufgaben ändern müssen. Die entscheidende Frage ist:

> **Was kommt stattdessen, was bleibt?**

Neue Medien werden von vielen Lehrern nicht begrüßt, sondern eher als Bedrohung empfunden: "Die Schulmathematiker sehen, daß ihnen durch die neue maschinelle Konkurrenz 'die Butter vom Brot' (vom kargen Brot der Schulmathematik!) genommen wird; denn sie leistet fast alles, was sie bisher in Klassenarbeiten, Klausuren und im Abitur für befriedigende Leistungen abzufragen gewohnt waren.[3]"

Computer-Einsatz unter dem neuen Lehrplan[4]

Die folgende Zitate stammen aus dem neuen Mathematik-Lehrplan S II in NRW:

„**Grundsätze zum Computereinsatz**

Computer, leistungsfähige Graphik-Taschenrechner und Computeralgebra-Taschenrechner sind gebräuchliche mathematische Werkzeuge geworden und sollten auch zu Werkzeugen des Mathematikunterrichts werden. ...

Der Computer ist ein geeignetes Werkzeug zur Visualisierung, er ermöglicht experimentelles Arbeiten und wirklichkeitsnähere Aufgabenstellungen. Er entlastet von langwierigen und komplizierten Rechnungen und dem Drill von Verfahren.

Bisher klassische Themen werden an Bedeutung verlieren; Modellbilden, das Herstellen von Bezügen und Finden von Zusammenhängen und die Reflexion des eigenen mathematischen Tuns können mehr Gewicht bekommen.
Bei längeren Computer-Arbeitsphasen ist eine zusammenfassende Rückschau sinnvoll.

[2] Schnegelberger, S. 71
[3] Meyer, Klingen,Hehl, S. 453
[4] Mit "neuem Lehrplan" ist immer der im Sommer 1999 in Kraft tretende Lehrplan S II für NRW gemeint.

Dem sprachlichen Formulieren mathematischer Sachverhalte kommt somit durch sinnvollen Computereinsatz wieder stärkere Bedeutung zu. ...

Es ist nicht sinnvoll, neue Inhalte und Methoden für den Computereinsatz zu entwickeln und bei der Leistungsüberprüfung alles beim Alten zu lassen. Auch in Klausuren und im Abitur sollten Schülerinnen und Schüler Computer als Werkzeuge einsetzen bzw. Aufgaben zu deren Einsatz bearbeiten.[5]"

Mündliches Abitur

„Der Umfang der gestellten Aufgabe muss bewusst begrenzt werden. Der rechnerische Aufwand ist gering zu halten. Die Darstellung und Begründung von Sachverhalten soll im Vordergrund stehen.
Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, eine Aufgabe zu stellen, die zur Lösung den Einsatz eines Rechners erfordert. Die Vorbereitungszeit kann bei Bedarf angemessen verlängert werden.[6]"

Schriftliches Abitur

„Programmierbare Taschenrechner und Computer können für die schriftliche Abiturprüfung als Hilfsmittel vorgesehen werden, wenn die Schülerinnen und Schüler aus dem Unterricht der Qualifikationsphase und den Klausuren über hinreichende Erfahrungen mit den Geräten verfügen.[7]"

Auf eins sollte noch deutlich hingewiesen werden: Entgegen verbreiteten Hoffnungen kann man nicht davon ausgehen, dass durch den Einsatz neuer Medien Zeit gespart werden kann[8]! Dies bestätigen auch die Erfahrungen in Österreich[9]. Die Zeit, die man bei langwierigen Rechnungen und Termumformungen einspart, benötigt man an anderer Stelle für die Einführung neuer Begriffe, für die Handhabung des jeweiligen Systems und für die speziellen Techniken beim Arbeiten in den einzelnen Fenstern.
Dazu kommt noch die Notwendigkeit einer angemessenen Dokumentation, die nicht nur für sich Zeit kostet, sondern auch noch als Technik in der Regel erst gelernt werden muss: "Es bedurfte viel Übung, eine halbwegs zufriedenstellende Dokumentationskultur zu erarbeiten.[10]"

Zum Computer-Einsatz in Klausuren

Bei einem rechnergestützten Unterricht ist es nicht sinnvoll, in Prüfungssituationen den Schülern die gewohnten Arbeitsmittel wegzunehmen. Die Entscheidung für einen durchgängigen und nicht nur sporadischen Rechnereinsatz im Unterricht führt

[5] Lehrplan, S. 47f
[6] Lehrplan, S. 89f
[7] Lehrplan, S. 75
[8] Eine diesbezüglich optimistische Passage in den Lehrplan-Entwürfen wurde zu Recht in der Endfassung gestrichen.
[9] Aspetsberger, S. 23
[10] Aspetsberger, S. 20

konsequenterweise auch zum Einsatz in Prüfungssituationen. Dabei ist es natürlich wünschenswert, für jeden Schüler einen Computer oder CAS-Taschenrechner zur Verfügung zu haben.
Dies ist vielerorts noch Zukunftsmusik[11]. Bei der Durchführung von Klausuren am Rechner ist es derzeit noch häufig ein Problem, dass mehr Schüler als Arbeitsplätze vorhanden sind[12]. Im Unterricht ist das dagegen kein Problem, weil üblicherweise zwei Schüler an einem Rechner arbeiten (dies ist sogar vorteilhaft).
Für die Klausur gibt es dann beispielsweise folgende Möglichkeiten: Die Klasse teilen und parallel in zwei Computerräumen schreiben oder die Klasse teilen und nacheinander schreiben oder die Arbeit teilen in einen 'Rechnerteil' und einen 'Papierteil', wobei nach der Hälfte der Zeit gewechselt wird.

Bei der Anfertigung der Klausur muss für die Schüler klar festgelegt sein, wie sie ihre Ergebnisse abgeben sollen. Es besteht z. B. die Möglichkeit, die Ergebnisse elektronisch auf Diskette (bzw. über das Netz) abzugeben, ggfs ergänzt durch einen Ausdruck. Alternativ oder ergänzend kann auch eine handschriftliche Zusammenfassung mit Übertragung von Ergebnissen erfolgen.
Es muss den Schülern klar sein, nach welchen Maßstäben der Lehrer korrigiert und bewertet, z. B. welchen Stellenwert er Kommentaren zumisst.

Für den Lehrer stellt sich bei der Erstellung der Klausur die Frage der Hilfsmittel und der Komplexität. Sollen die Schüler mit fertigen Bausteinen/ Modulen arbeiten oder soll alles von Grund auf selber erstellt werden? In welchem Umfang soll/ kann programmiert werden? Inwieweit sollen Fertigkeiten im Umgang mit der Software Gegenstand der Prüfung (und vorher des Unterrichts) sein? Welcher Aufgabenteil soll rechnergestützt und welcher klassisch bearbeitet werden? Muss ein rechnergestützter Unterricht auch einen direkten Rechnereinsatz zur Folge haben?

Die erforderliche Arbeitszeit wird anfangs oft stark unterschätzt. Der Umgang mit dem Gerät braucht seine Zeit, experimentelles Arbeiten braucht Zeit. Modellieren ist anspruchsvoll (in welchem Umfang geht das überhaupt unter Klausurbedingungen?) und zeitintensiv.

Die Tücken des Systems sollten auch nicht unterschätzt werden. Dies betrifft nicht nur einen möglichen Datenverlust durch Rechnerabsturz oder falsche Bedienung[13], sondern auch das Festhängen bei der Bearbeitung durch eigentlich geringfügige Fehler (z.B. in der Syntax) oder unerkannte Effekte durch Besonderheiten der Software (z.B. früher definierte Variablen).

Auch können Situationen eintreten, die von einer fachkundigen Aufsicht ohne Probleme gemeistert werden, andere Lehrer aber vor unlösbare Probleme stellen. Daher sollte durchgängig eine fachkundige Aufsicht gesichert sein.

[11] Bei fallenden Preisen wird aber in absehbarer Zeit die Ausstattung mit einem CAS-Taschenrechner wie dem TI 92 gängig werden.
[12] All dies ist beim Arbeiten mit einem Klassensatz TI 92 kein Problem. Dafür besteht derzeit noch das Problem, diesen im Klassensatz angeschafft zu bekommen.
[13] Im Zeitalter der Computer-Netze hat aber die Rechnerstabilität deutlich zugenommen. Auch ist es prinzipiell nicht auszuschließen, dass ein Schüler falsch abgespeichert hat. In der Regel finden sich die Dateien aber wieder. Und wer kennt nicht den Fall, dass bei einer konventionellen Klassenarbeit auf einmal ein Heft fehlt?!

Fazit:

Ein Rechner-Einsatz ist in Klausuren für den Lehrer derzeit mit Aufwand und Mühe verbunden und bei Problemen auch mit Nervenbelastung.

Dafür können Aufgaben gestellt werden, die dem rechnergestützten Vorgehen im Unterricht entsprechen und experimentelle, visuelle, modellbildende, interpretierende Ansätze ermöglichen.

Beispiele für Prüfungsaufgaben mit neuen Medien

Im Folgenden werden Beispiele aus verschiedenen Stufen und Kursformen, mehreren Themenbereichen mit unterschiedlichen Werkzeugen vorgestellt. Sie sind als Anregungen gedacht.

1. GK11: Beschreibende Statistik (Excel)
2. LK 11: Analysis (Derive)
3. GK 12: Analysis (TI 92)
4. LK Abitur: Analysis (GTR)
5. LK Abitur: Analysis (TI 92)
6. LK Abitur: Lineare Algebra/ Geometrie (Derive)
7. Mündliches Abitur: Analysis (Derive)

1. Eine rechnergestützte Aufgabe <u>ohne</u> Rechnereinsatz

Aufgabe Klausur GK 11 Beschreibende Statistik *(Elschenbroich)*

Folgende Daten sind über den Verkauf von CDs und LPs bekannt. Mit Excel ist schon ein Punktdiagramm erstellt und die Varianz bzw. Kovarianz berechnet worden.

Kovar (X; Y) = - 519,594

	X	Y
Jahr	**CD (Mio)**	**LP (Mio)**
85	6,8	74
86	13,3	68,8
87	22,8	66,3
88	39,2	57,6
89	56,9	48,3
90	76,2	44,7
91	102,2	23,4

var (X) = 1053,811

var (Y) = 262,131

a) Bestimmen Sie die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ und die zugehörigen Standardabweichungen.

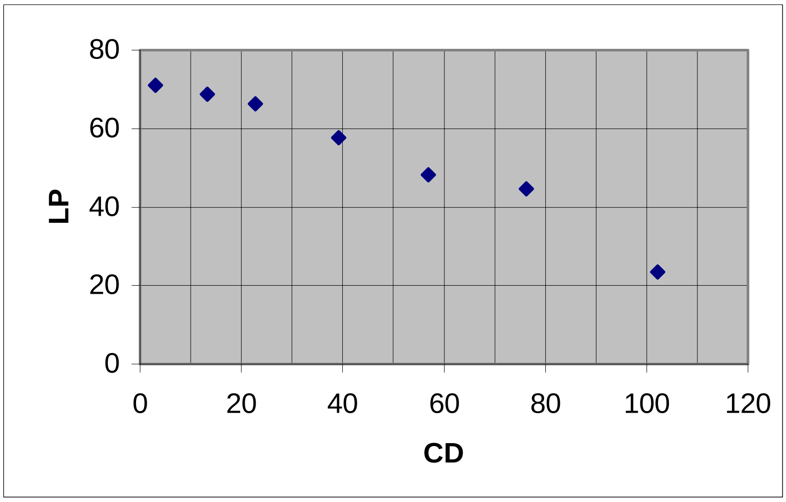
b) Bestimmen Sie die Gleichung der y-Regressionsgeraden und zeichnen Sie diese in das Diagramm ein.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der x-Regressionsgeraden und zeichnen Sie diese in das Diagramm ein.

d) Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten mittels Varianz und

Kovarianz.
Deuten Sie das Ergebnis, auch in Bezug auf das Ergebnis aus b) und c).

e) Was lässt sich über die Eignung der linearen Regression für eine längerfristige Prognose aussagen?



Kommentar

Wegen organisatorischer Probleme fand diese Klausur nicht mit Computereinsatz statt, im vorangehenden Unterricht wurde aber intensiv Excel eingesetzt.

Die langwierigen, lästigen und tippfehler-anfälligen Rechnungen für Varianz und Kovarinz wurden mit Excel vorgenommen und in die Aufgabenstellung verlagert, ebenso die Erstellung des Punktediagramms.
Durch die Vorgabe dieser Werte ist die spätere Berechnung der Regressionsgeraden und der Korrelation wenig fehleranfällig und frei von Folgefehlern.

Die Berechnung der Standardabweichung erfordert lediglich Wurzelziehen mit dem TR.

Die Berechnung des Mittelwerte bei 7 Merkmalsausprägungen ist überschaubar und zumutbar. Hier wurde darauf verzichtet, dies auch durch Excel vorzugeben.

Bei der Bestimmung der Regressionsgeraden müssen jeweils 2 lineare Gleichungen gelöst werden.

In a) – c) müssen neben geringen Rechnungen die Schüler i. w. Aufgaben aus dem Anforderungsbereich I (nach RL) bzw. Routineaufgaben (nach Wynands/ Bauer) erfüllen.

Die Berechnung des Korrelationskoeffizienten in d) ist ebenfalls rechnerisch schnell mit Divisionen erledigt. Der Anforderungsbereich II wird erreicht, wenn das Ergebnis anschaulich gedeutet werden muss (Weite des Winkels zwischen den beiden Regressionsgeraden).

In e) müssen die Schüler fern jeglicher Rechnerei das Ergebnis der Regressionsberechnung im Sachzusammenhang interpretieren. Die gute Korrelation sagt hier lokal etwas aus über den vorliegenden Verlauf der Punktewolke, ist aber nicht global geeignet für eine langfristige Prognose, weil dann in absehbarer Zeit die Verkaufszahlen für LPs negativ werden müssten. Solche Überlegungen waren den Schülern vertraut und können dem Anforderungsbereich II bzw. Entschlüsselungsaufgaben zugeordnet werden.

2. Eine fast klassische Kurvendiskussion mit Derive

Aufgabe LK 11 Analysis (*Elschenbroich*)

Gegeben ist die Funktionenschar $\mathbf{f}_a(x) = x^4 - \frac{1}{2} a x^3$.

Lösen Sie folgende Teilaufgaben mit Derive, eine Erläuterung gehört mit zur Lösung!
Tragen Sie die Gleichung zur Kontrolle unten ein.

a) Plotten Sie die Graphen von $\mathbf{f}_a$ für a = 0, 1, ... , 5.

b) Untersuchen Sie für a > 0 $\mathbf{f}_a$ auf Nullstellen, Hoch-/ Tiefpunkte und Wendepunkte.
Tragen Sie zur Kontrolle die Ergebnisse unten ein.

c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Tiefpunkte und plotten Sie diese Ortskurve zusätzlich zu den Graphen aus a).

Speichern Sie die Derive-Datei und die Graphen[14] auf Diskette.

Nullstellen: ....

Hoch-/ Tiefpunkte: ....

Wendepunkte: ....

Ortskurve der TP: ....

Kommentar

Die Aufgabe erscheint auf den ersten Blick wie eine Standard-Kurvendiskussion.

Steht aber bei jener die Erstellung der Graphen mittels Berechnungen von Ableitungen und Lösung von Gleichungen als höchstes Ziel am Ende, so werden die Graphen jetzt als allererstes geplottet und alle wesentlichen Rechnungen übernimmt Derive.

Die übliche Untersuchung auf markante Stellen erfolgt jetzt als Verallgemeinerung mit dem Scharparameter a unter Blick auf die einzelnen Graphen.

Die Ableitungen und Lösung der entsprechenden Gleichungen werden mit Derive vorgenommen, der rechnerische Anteil ist also praktisch nicht mehr vorhanden.
Der Schüler muss aber wissen, wofür er welche Ableitungen bilden muss und wie er bestimmte Vorzeichen zu deuten hat und dies auch in Kommentaren festhalten.

[14] In der aktuellen Version von Derive kann man die Graphen nicht abspeichern. Die Schüler haben die Graphen über die Zwischenablage nach Paint exportiert und von dort aus als 16-Farben-BMP abgespeichert.

Die Berechnung der Ortskurvengleichung ist ebenfalls numerisch unkritisch. Der Schüler muss aber wissen, welche Gleichungen er wie bearbeiten muss und welche Substitutionen er vornehmen muss.
Das Plotten des Graphen der Ortskurvenfunktion erfolgt zu der schon gezeichneten Kurvenschar. Eine Kontrolle ist damit unmittelbar gegeben.

Es wurde neben den üblichen Termumformungen ausdrücklich verlangt, die einzelnen Derive-Schritte zu kommentieren. Eine solche Form der Dokumentation waren die Schüler aus dem Unterricht gewohnt.

Das Notieren der einzelnen Ergebnisse zusätzlich zur Diskette mit der Derive-Datei war zur Sicherheit gedacht, erwies sich aber auch bei der Korrektur als sehr effizient.

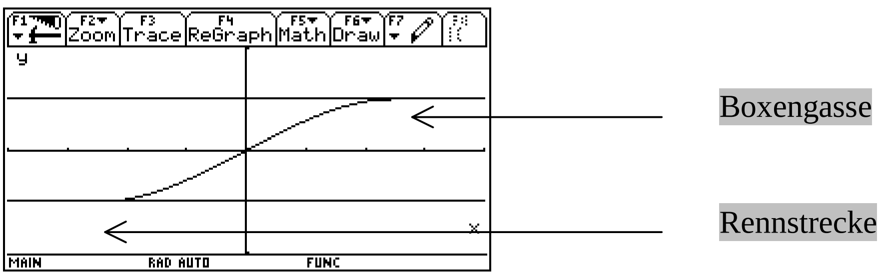
3. Eine anwendungsorientierte Aufgabe mit TI 92

Aufgabe GK 12 Analysis (*Dr. Esper*)

Die Formel 1-Strecke in Argentinien hat bei Start und Ziel eine Gerade, die parallel zur x-Achse verlaufe (siehe links).

Parallel dazu ist die Boxengasse, in der die Fahrzeuge aufgetankt werden (siehe Photo links).

Der Übergang von der im unteren Diagramm dargestellten Boxengasse zu der Rennstrecke soll durch den Graph einer Funktion beschrieben werden, der in folgender Form die Verbindung darstellt:



Der Übergang erfolgt an den Stellen x= 2.4 und x= -2.4.
Der Graph der Funktion erfüllt folgende Bedingungen:

1) f '(2.4) = 0
2) f(2.4)=1
3) f ''(2.4) = 0
4) Der Graph ist punktsymmetrisch.

a) Erläutern Sie die mathematische und inhaltliche Bedeutung dieser Bedingungen.

b) Ein erster Vorschlag für den Funktionsterm wird durch folgenden Term beschrieben:

$$f(x) = 0.6124x - 0.0340x^3$$

Überprüfen Sie, wie gut diese Funktion die obigen Bedingungen erfüllt.

c) Sie sollen einen Ansatz für eine Funktion aufstellen, die die obigen Bedingungen erfüllt. Welchen Grad muss Ihr Funktionsterm haben? (Begründung!)

d) Setzen Sie die obigen Bedingungen mit Hilfe Ihres Ansatzes in ein Gleichungssystem um, aus dem man die Koeffizienten bestimmen kann.

Kommentar

In a) werden die Bedingungen aus der mathematischen Formelsprache ("Geheimsprache") in anschauliche Sachzusammenhänge übersetzt. Die Schüler müssen verstanden haben, welche Bedeutung erste und zweite Ableitung für 'Knickfreiheit' und 'Ruckfreiheit' haben.

In b) wird eine mögliche Lösung vorgegeben, die auf Eignung untersucht werden soll. Hier geht es um Verständnis. Der Schüler muss dabei wissen, welche Terme er wofür aufstellen muss. Die Rechnungen werden vom TI 92 übernommen.

In c) geht es ausschließlich um sinnvolle Argumentation, keine Rechnung.

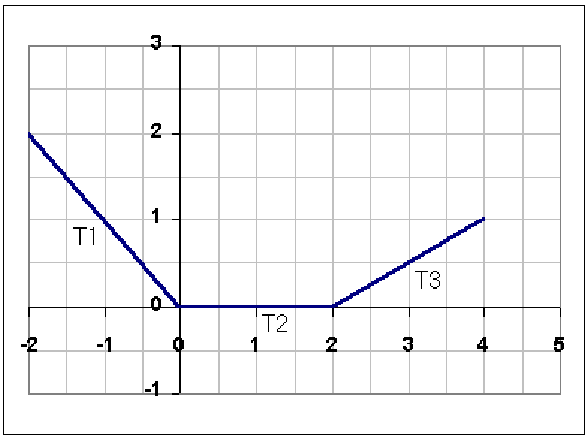
Die Rechnung findet in d) statt, wird wiederum vom TI 92 übernommen, nachdem der Schüler ein geeignetes LGS aufgestellt und eingegeben hat.

4. Eine anwendungsorientierte Abituraufgabe mit GTR

LK-Abituraufgabe Analysis mit dem TI 82[15] (*Ebenhöh*)

Neubau einer Straße

Die in der Skizze dargestellte Linienführung einer Straße wird den Anforderungen des immer schneller werdenden Autoverkehrs nicht mehr gerecht. Insbesondere die "Knicke" zwischen den Teilstücken T_1 und T_2 bzw. T_2 und T_3 haben wiederholt zu Klagen und Unfällen geführt. Deswegen soll für das Teilstück T_2 eine neue Linienführung gefunden werden.



1. Bestimmen Sie die Gleichung einer Polynomfunktion 5. Grades, deren Graph das rechte und das linke Teilstück der Straße "glatt" miteinander verbindet. Erläutern Sie, welche mathematischen Begriffe von der umgangssprachlichen Formulierung "glatt" erfasst werden.

[15] Ebenhöh, S. 66

Dem Straßenbauamt liegen drei Vorschläge zum Bau des neuen Teilstücks vor, und zwar jeweils die Graphen der Funktionen f_1 bis f_3 im Intervall [0;2].

$$f_1(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x$$

$$f_2(x) = \frac{3}{32}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + x^3 - x$$

$$f_3(x) = -\frac{3}{2\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x) - \frac{1}{4\pi}\sin(\pi x)$$

2. Bestimmen Sie zunächst von jeder dieser Funktionen numerisch das Krümmungsmaximum im angegebenen Intervall.

(Term der Krümmungsfunktion von f: $K(x) = \dfrac{f''(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}^3}$)

Beurteilen Sie dann die drei möglichen Linienführungen, indem Sie alle wichtigen Werte berücksichtigen, die einen optimalen Straßenverlauf gewährleisten.
Geben Sie dem Straßenbauamt eine Empfehlung, nach welcher Funktion das neue Teilstück gebaut werden soll, und berücksichtigen Sie dabei, dass es aus Kostengründen im Interesse des Amtes liegt, die Fläche zwischen altem und neuen Teilstück möglichst gering zu halten. Selbstverständlich ist Ihre Empfehlung zu begründen. Falls Sie keine Empfehlung geben können, führen Sie Ihre Gründe dafür an, und geben Sie Hinweise, ob und wie nach weiteren Lösungsmöglichkeiten gesucht werden soll.

Kommentar

Hier geht es um die Umkehrung der üblichen Kurvendiskussion, eine „Steckbriefaufgabe“, und zwar in einem Sachzusammenhang.

Es soll aber nicht nur **die** Lösung bestimmt werden, sondern es liegen verschiedene mögliche Vorschläge vor, die auf Tauglichkeit untersucht und bewertet werden sollen.

Hier wird der GTR TI 82 eingesetzt, der numerisch LGS lösen kann. Die Schüler müssen die Bedingungen aus dem Sachzusammenhang in mathematische Ausdrücke übersetzen und aus diesen ein LGS erstellen, dessen Koeffizienten einzugeben sind.

Bei der Berechnung und Zeichnung der Krümmungsfunktion kann der GTR sinnvoll eingesetzt werden. Ohne ein solches Hilfsmittel wäre diese Aufgabe für Schüler nicht bearbeitbar. Die Schüler können dabei auf TI 82-Befehle zum numerischen Differenzieren zurückgreifen, bei der Flächenberechnung auf Befehle zum numerischen Integrieren. Ein CAS ist hier nicht unbedingt erforderlich.

Der Rechnereinsatz ermöglicht anwendungsorientierte Fragestellungen, die sonst nicht bearbeitbar gewesen wären.
Gegenüber sonstigen kalküllastigen Steckbriefaufgaben zeigen sich Ansätze von Modellbildung, indem verschiedene mögliche Lösungen nach Eignung untersucht und klassifiziert werden sollen.

5. Veränderungen einer Aufgabe: Aus alt wird neu (1)

LK-Abituraufgabe Analysis mit dem TI 92[16] (*Lehmann*)

Alte Aufgabenstellung

Abiturprüfung Leistungskurs 1996/97, Gymnasium, Paetec-Verlag, Berlin 1997, Seiten 78-83. Die Aufgabe stammt aus einem Berliner Gymnasium

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}, x \in \Re$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie, Nullstellen und sein Verhalten für $x \to \pm\infty$.

b) Weisen Sie nach, daß der Graph der Funktion f keine Hoch- und Tiefpunkte hat und dass der Punkt (0/ 0) ein Sattelpunkt ist. Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall I=[-2,5;2,5] in ein Koordinatensystem.

c) Weisen Sie nach, daß die Funktion die Umkehrfunktion f* besitzt, und zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion im Intervall [-2,5;2,5] in das Koordinatensystem von Teilaufgabe b).

d) Die Graphen der Funktion f und f* schließen eine Fläche A ein. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes von A.

Eine neue Aufgabenformulierung

unter Beibehaltung der Funktionsgleichung. Der Rechnereinsatz ist nun erlaubt. Dadurch werden viele Handrechnungen überflüssig und der Schwerpunkt verlagert sich auf Begründungen, also auf das mathematische Verständnis. Leicht mit dem CAS zu erstellende Graphen werden gegeben. Damit dienen Abb.1 und unter anderen Aspekten auch Abb. 2 als Arbeitsmaterial.

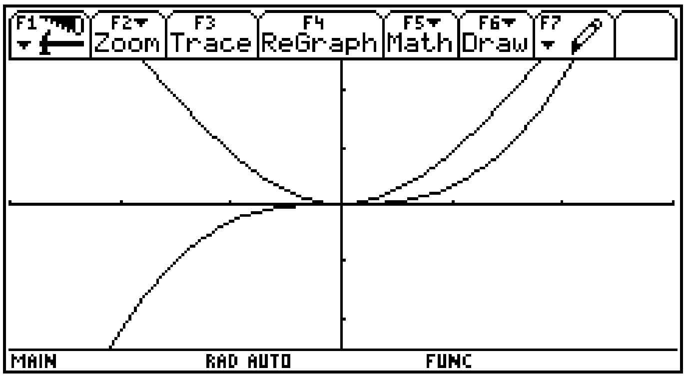
Die Aufgabenstellung

Hinweis: Das Ihnen bekannte Computeralgebrasystem (CAS) kann überall verwendet werden. Alle Ansätze mit dem CAS sind jedoch zu begründen, Ergebnisse zu interpretieren und ggf. mit geeigneten Bezeichnungen in der Zeichnung zu ergänzen.

Gegeben ist eine Funktion f durch

$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}, x \in \Re$ und ihr Graph G(f), sowie der Graph G(f '), beide etwa für x aus [-3;3].

[16] (Abiturprüfung Leistungskurs 1996/97 Paetec-Verlag/ Lehmann, S. 5

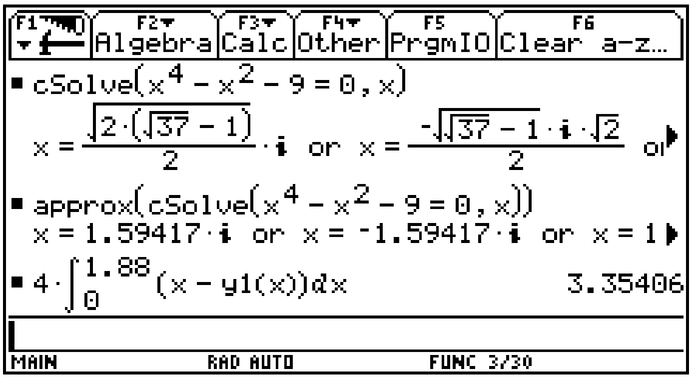


a) Markieren Sie G(f) farbig, und begründen Sie den Verlauf des Graphen G(f). Berücksichtigen Sie bei der Begründung u.a. eventuelle Symmetrien, Nullstellen und das Grenzverhalten.

b) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion keine Hoch- und Tiefpunkte haben kann und dass der Punkt (0/ 0) ein Sattelpunkt ist.

c) Weisen Sie nach, daß die Funktion eine Umkehrfunktion f* besitzt und zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion im Intervall [-3;3] in die gegebene Zeichnung ein.

d) Die Graphen der Funktion f und f* schließen eine Fläche A=3,35406 FE ein. Markieren Sie diese in der obigen Zeichnung. Nehmen Sie dann Stellung zu dem folgenden Bildschirmausdruck, und berechnen Sie das Integral in der letzten Zeile ausführlich mit Zwischenschritten.



Kommentar

Viele Rechnung werden vom CAS übernommen, der Schwerpunkt verlagert sich auf Begründungen.
Die Graphen werden in der Aufgabenstellung mit gegeben, es wird **mit** ihnen gearbeitet, ihre Erstellung ist nicht mehr höchstes Ziel der Aufgabe.

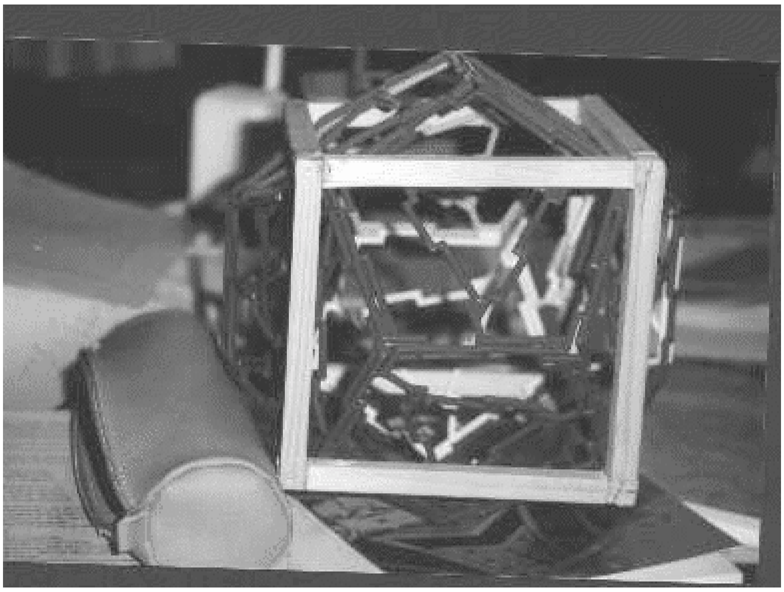
6. Ein moderner Klassiker

Abituraufgabe LK Geometrie mit Derive[17] (***Platzbecker***)

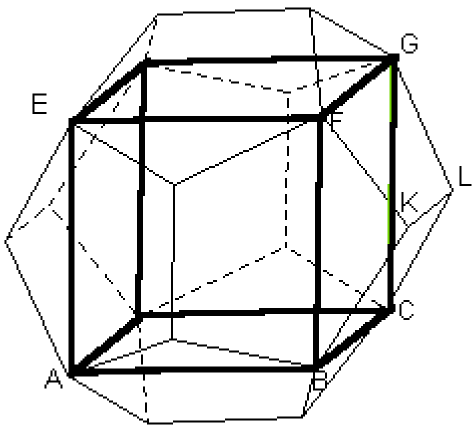
Generalhinweis: Du darfst bei der Lösung aller Aufgaben mit Derive rechnen, Du musst aber alle Schritte klassisch begründen (wie immer!) !

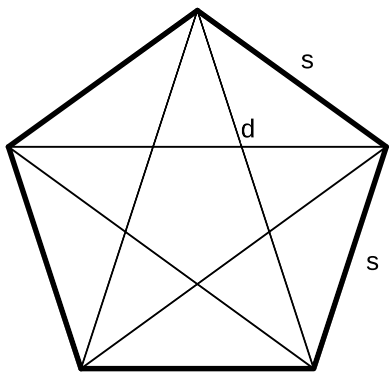
Das Dodekaederproblem (vgl. Photo)

Reale Modelle stehen auf dem Lehrerpult.



Die Skizze zeigt ein Dodekaeder, das als "Koordinatenstützkörper" einen Würfel mit der Kantenlänge 2 hat. Jede Würfelkante ist Diagonale in einem regelmäßigen Fünfeck.





a) Zeige: In einem regelmäßigen Fünfeck mit der Diagonalenlänge 2 LE beträgt die Seitenlänge s = $\sqrt{5}-1$ LE !

[17] Siehe auch Abituraufgaben im Mathe-Treff: http://www.mathe-treff.de

b) Beweise anhand der Modelle den "**Goldenen Dodekaedersatz**":

Das Dodekaeder ist ein Würfel mit 6 aufgesetzten Walmdächern.
Dabei hat jedes Walmdach die "goldene" Firstlänge s = $\sqrt{5}-1$ LE und die "halbgoldene" Dachhöhe H = s/2.

Tipp : Zeige $H^2 = \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right) = \frac{s^2}{4}$.

c) Wie lauten die Koordinaten der Punkte F, K, L, G und M?
Berechne den Winkel zwischen FK und FM.

d) Wie würdest du prinzipiell mittels Derive den Realpunkt M als Bildschirmpunkt zeichnen?
Wie erhält man die dazu notwendige Abbildungsmatrix, wenn das Dodekaeder parallel auf die yz-Ebene projiziert wird?

e) Beschreibe drei verschiedene Methoden zur Berechnung des Dodekaedervolumens! Gib die einzelnen Rechenschritte und Derivebefehle für ein konkretes Verfahren an!

Kommentar

Klassische Themen der Darstellenden Geometrie und Analytischen Geometrie werden hier mit Aspekten der Computergraphik verbunden.

Bei den Umformungen und Rechnungen in a) - c) kann Derive als algebraischer Rechenknecht eingesetzt werden.

In d) würde sich auch ein Einsatz von Derive mit Acrospin anbieten. Der Fachlehrer hat im Erwartungshorizont darauf hingewiesen, dass aus Zeitgründen und Sorge vor Syntaxfehlern hier der Derive-Einsatz vermieden wird. (Zitat dazu: 'Dies erfährt man am besten in eine Selbstversuch unter Zeitdruck!')
Statt tatsächlicher Berechnung bzw. Zeichnung wird nach dem prinzipiellen Vorgehen gefragt. Der tatsächliche Derive-Einsatz ist hier also vergleichsweise gering, diese Aufgabe ist so aber nur auf einem rechnergestützten Unterricht aufbauend möglich.

7. Veränderungen einer Aufgabe: Aus alt wird neu (2)

Alte Aufgabenstellung

Aufgabe mündliches Abitur (*Fachseminar-Rahmenplan Mathematik*[18])

Um die Ortschaft **D**, die an der geraden Strasse durch **A**(0/4) und **B**(4/0) liegt, wird eine Umfahrung gebaut. Diese soll in **A** und **B** tangential in die alte Straße münden und durch den Punkt **C**(2/1) gehen. (Einheit 1 km)

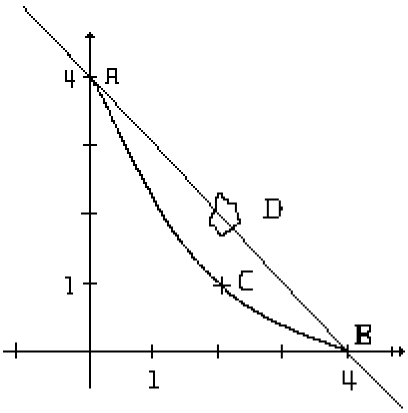
a) Suche eine Polynomfunktion **p** vom Grad 4, deren Graph den obigen Bedingungen entspricht.

b) Zeichne die Graphen von **p** und **p**' im Intervall [-2 ; 5]. (Zeicheneinheit: 2 cm)

[18] http://www.learn-line.nrw.de/Faecher/Mathematik/RPlanSII/Material/M_001.lm/aufgab1.htm

c) Erkläre im Zuge der Berechnung der Extrema und Wendepunkte von p die Zusammenhänge zwischen **p** , **p**' und **p**" und begründe sie.

d) Die Strasse führt durch Ackerland. Der gesamte Grund zwischen der neuen und der alten Straße soll aufgekauft werden. Wie viele Quadratmeter sind das?



Neue Aufgabenstellung

Aufgabe mündliches LK-Abitur mit Derive[19] (*Elschenbroich)*

Um die Ortschaft **D**, die an der geraden Strasse durch **A**(0/4) und **B**(4/0) liegt, wird eine Umgehungsstraße gebaut.
Diese soll in **A** und **B** tangential in die alte Strasse münden und durch den Punkt **C**(2/1) gehen. (Einheit 1 km)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Derive eine ganzrationale Funktion **f** vom Grad 4, deren Graph den obigen Bedingungen entspricht. Erläutern Sie ihren Ansatz.

b) Plotten Sie die Graphen von **f**, **f** ' und **f** " in ein Koordinatensystem. Erläutern Sie daran die Zusammenhänge zwischen **f** ", **f** ' und **f** und ziehen Sie Schlußfolgerungen für markante Punkte des Graphen von **f**.

c) Untersuchen Sie, ob die neue Straße in **A** und **B** "ruckfrei" in die alte Straße übergeht.

d) Wie groß ist die Fläche zwischen den beiden Strassen? Erläutern Sie Ihren Ansatz.

Kommentar

In der Neufassung gibt es eine deutliche rechnerische Entlastung und eine daraus resultierende erhebliche Verringerung der Fehleranfälligkeit.
In a) müssen die Bedingungen aufgestellt, in ein LGS übersetzt und in Derive eingegeben werden.

In b) erfolgt das Bilden der Ableitungen und zeichnen der Graphen ebenfalls direkt durch Derive. Die qualitative Argumentation an den Graphen ist beiden Aufgaben eigen. In der

[19] Lehrplan Mathematik S. 92

Neufassung ist aber davon auszugehen, dass in deutlich mehr Fällen die richtigen Graphen von p' und p" vorliegen und daran sinnvoll argumentiert werden kann.

Die deutliche rechnerische Entlastung ermöglicht es, die (sinnvolle) Frage nach der Ruckfreiheit aufzunehmen. Die unangenehmen Rechnungen werden wieder von Derive übernommen, die Fragestellungen waren am Graphen der Krümmungsfunktion zu bearbeiten. Entsprechende Fragestellungen waren den Schülern bekannt.

Im letzten Aufgabenteil wird in beiden Fällen eine Fläche berechnet. Dadurch, dass die Berechnung des bestimmten Integrals aber (bis auf den Ansatz) von Derive geleistet wird, ergibt sich der Freiraum, nach der Erläuterung des Ansatzes zu fragen und so mehr Verständnis als Rechenfertigkeit abzuprüfen.

Diese LK-Aufgabe kann im Prinzip auch für einen GK gestellt werden, ggfs. mit Verzicht auf die Ruckfreiheit oder stärkeren Hilfen (z.B. Vorgabe des Krümmungsterms).

Veränderungen und Schwerpunktverlagerungen

Insbesondere durch den Einsatz von CAS brechen einige traditionelle Themen dramatisch weg. In der Analysis geht es weg von Kurvendiskussionen und dem Ausrechnen komplizierter Integrale hin zu Anwendungen und Modellierungen, etwa Steckbriefaufgaben mit Splines oder Optimierungsaufgaben. Funktionsgraphen können auf Knopfdruck gezeichnet werden und es wird vermehrt mit ihnen gearbeitet statt sie als höchstes Ziel zu skizzieren.
In der Linearen Algebra/ Analytischen Geometrie geht es weg von vom Himmel gefallen Schnittproblemen ('Hieb und Stich'-Aufgaben) und einer systematischen Behandlung ebener affiner Abbildungen hin zu einer stärkeren Betonung von Linearen Gleichungssystemen und Matrizen (Übergangsprobleme, Abbildungen im R^3). Insgesamt spielen Visualisierungen eine größere Rolle. Es können Abbildungen im R^3 und ihre Verkettungen studiert werden und in der Analytischen Geometrie Schnittprobleme in Sinnzusammenhängen sichtbar gemacht werden.

Da Rechnungen und algebraische Umformungen vom Computer übernommen werden, wird das Beschreiben der Arbeit mit dem Computer und Interpretieren und Werten von Ergebnissen eine höhere Bedeutung.
Nicht der Kalkül steht mehr im Vordergrund (z. B. das routinierte Integrieren von Funktionen), sondern fundamentale Ideen und Grundvorstellungen (z.B. wann muss man warum integrieren und wann warum differenzieren).
Mathematik auf Knopfdruck ohne irgend etwas zu wissen und verstanden zu haben wird es genauso wenig geben wie Literatur auf Knopfdruck durch Textverarbeitung. Man muss genau wissen, welche Knöpfe man wann in welcher Reihenfolge zu drücken hat und das erfordert Kenntnis und Verständnis.

Immer wieder taucht dabei zwangsläufig die Frage auf "Wieviel Termumformung braucht der Mensch?[20]".
Wieviel Kalkül muss sein, welche algebraischen Fertigkeiten braucht man noch, auch um zu verstehen, was der Rechner da eigentlich intern macht?
Eine Frage, die vermutlich auch nicht abschließend beantwortet werden kann, sondern im Laufe der Entwicklung anders gesehen werden wird.

Sicher ist jedenfalls:

[20] Herget (1991)

Durch den Rechnereinsatz geht der rechnerische Anteil am Mathematik-Unterricht und in den Mathematik-Prüfungen drastisch zurück.

Durch CAS verschwinden zahlreiche algebraische und arithmetische Hürden; es kommt mehr auf Verständnis, Grundvorstellungen und fundamentale Ideen an.
Wichtig wird, mathematische Ideen, Ansätze und Lösungswege zu beschreiben und Ergebnisse zu kommentieren. Aspekte eines mathematischen Aufsatzes werden vermehrt zum Tragen kommen, zudem muss Mathematik auch als Fremdsprache gesehen werden, die ins Umgangssprachliche zu übersetzen ist.
Es nehmen Tätigkeiten wie Planen, Modellieren, Interpretieren, Dokumentieren und Reflektieren größeren Raum ein. Es wird mehr und direkter mit graphischen Darstellungen gearbeitet, die einfach erzeugt werden können und es wird zwischen verschiedenen Repräsentationsformen gewechselt werden.

Insgesamt ist aber nicht zu erwarten, dass es eine ganz neue Mathematik gibt, es verschieben sich vielmehr Akzente und Schwerpunkte.
Bruder weist darauf hin, „dass durch Computer die fundamentalen Ideen vielleicht anders gegeneinander gewichtet werden oder neue Ausprägungen erhalten – aber ganz neue Ideen entstehen dadurch nicht.“
Herget formulierte es so: „Der Mathematikunterricht wird anders, aber wohl nur *etwas* anders.“

Anders prüfen?

Bei den Taschenrechnern hatte seinerzeit Weigand die Frage untersucht, welche Veränderungen der Taschenrechner im Mathematikunterricht bewirkt hatte und kam für das Prüfungswesen zu dem Schluss: „Es gab keine Veränderung bei Zielen, Methoden und der Art der Prüfungsaufgaben.[21]“

Gilt das für den Computereinsatz heutzutage entsprechend?

Heißt *'etwas* anderer' Unterricht dann auch nur: *Etwas* anders prüfen?

An dieser Stelle können derzeit vor allem Fragen formuliert werden, für (end)gültige Antworten ist es noch viel zu früh:

- ☞ Der Computereinsatz führt zu mehr Differenzierung im Lernprozess. Muss dann auch differenziert geprüft und bewertet werden?
- ☞ Ist die derzeitige Ausrichtung des Unterrichts an Klausuren noch sinnvoll und angemessen und auf Dauer zu halten?
- ☞ Lassen sich beispielsweise Modellbildung, experimentelles Arbeiten und Interpretieren unter Klausurbedingungen überhaupt angemessen realisieren/ überprüfen?
- ☞ Bekommen individuellere Facharbeiten und Projekte mehr Gewicht?
- ☞ Wird die 'Sonstige Mitarbeit' stärker berücksichtigt werden (müssen)?
- ☞ Welchen Aspekte der 'Sonstigen Mitarbeit' kommen durch den Computereinsatz hinzu bzw. gewinnen an Bedeutung?

[21] Weigand (1998), S. 257

Gerade der 'Sonstigen Mitarbeit' in verschiedenen Ausformungen hat der neue Lehrplan in NRW viel Aufmerksamkeit gewidmet:

"Selbstständiges Arbeiten sowie das Arbeiten in Gruppen und Projekten ist in der gymnasialen Oberstufe wichtig und darf aus der Leistungsbewertung nicht ausgeklammert werden.

Gesichtspunkte können sein, wie und in welchem Umfang die Schülerinnen und Schüler

- Beiträge zur Arbeit leisten
- Beiträge anderer aufnehmen und weiterentwickeln
- sich in die Denkweisen anderer einfinden
- Aufgaben wie Gesprächsleitung, Protokollführung, Berichterstattung übernehmen
- Informationen beschaffen und erschließen
- ihre Gruppenarbeit organisieren und durchführen, auch in arbeitsteiligen Verfahren
- systematische und heuristische Vorgehensweise nutzen
- ihre Arbeitsschritte überprüfen, diskutieren und dokumentieren.Bei der selbstständigen Arbeit kann darüber hinaus mitbewertet werden, in wieweit eine Schülerin bzw. ein Schüler in der Lage ist

- das eigene Lernen zielbewusst zu planen und zu steuern
- den eigenen Lernerfolg zu überprüfen und
- daraus Rückschlüsse zu ziehen für das weitere Lernen.[22]"

Das Ministerium für Bildung und Kultur in Rheinland-Pfalz stellte zu dieser Thematik schon 1992 fest[23]: "Alle bisher vorliegenden Erfahrungen im Mathematikunterricht mit Computereinsatz deuten darauf hin, daß sich die nichtschriftlichen Formen der Leistungsfeststellung am einfachsten den veränderten Bedingungen anpassen lassen."

Insofern gibt es von Seiten der Bildungspolitik durchaus Signale, sich im Prüfungswesen nicht nur einseitig auf Klausuren zu beschränken, sondern die ganze Palette der 'Sonstigen Mitarbeit' verstärkt zu berücksichtigen, was dem Einsatz neuer Medien durchaus entgegen kommt. Dies bedeutet keine Beschränkung auf mündliche Mitarbeit, sondern andere Formen der schriftlichen Arbeit wie Facharbeit und Projekte sind hier einzubeziehen.

In deutschen Landen sind Prüfungen durchweg Einzelprüfungen. Gruppenarbeit wird zwar zunehmend als Arbeitsform für den Unterricht propagiert, bei Leistungsüberprüfungen sind aber Gruppenarbeiten ausdrücklich so abzufassen, dass die individuelle Leistung erkennbar ist[24]. Aus Österreich ist allerdings schon über Team-Prüfungen berichtet[25] worden, es wurde 1998 eine vierstündige Mathematik-Reifeprüfung bei Einsatz von Mathematica in der Aufteilung zwei Stunden Teamarbeit und zwei Stunden Einzelarbeit abgelegt. Inwiefern solche Ansätze sich über Schulversuche hinaus durchsetzen und als sinnvoll und praktikabel erweisen, ist derzeit noch nicht abzusehen.

In jedem Fall aber ist derzeit schon erkennbar, dass neue Werkzeuge und neue Methoden auch neue Prüfungsformen erfordern, die über die bisher üblichen schriftlichen Leistungsüberprüfungen in Form von Klausuren hinausgehen und diese zumindest ergänzen werden.

---

[22] Lehrplan S. 68
[23] Der Computer als Werkzeug im Mathematikunterricht, S. 15
[24] Lehrplan S. 63
[25] Wurnig, S. 612

Ein anderer Unterricht bringt auch andere Prüfungen mit sich. Bringen neue Medien mehr Selbsttätigkeit der Schüler und mehr Differenzierung mit sich, so muss das auf Dauer auch in den Prüfungen seinen Niederschlag finden.

Eine praktikable Möglichkeit ist sicher auch die von Helmut Heugl vorgeschlagene Aufteilung[26] der Prüfungen in "Pflichtteil" (kurze Prüfungen auf Routineteile, Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten) und einen "Kürteil" (experimentelles Arbeiten, heuristisches Vorgehen, Modellieren, Interpretieren, individuellere Fragestellungen). Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Aufgabenstellungen nicht durch eine zu starke Betonung des Modellierungsaspektes zu komplex werden - eine durchaus berechtigte Sorge vieler Lehrer und Schüler. Im Sinne der Einstufungen von Bauer/ Wynands müssten aus Routineaufgaben vorwiegend Entschlüsselungsaufgaben werden.

Literatur

Althoff, Heinz: Überlegung zur Leistungsbewertung bei einer Klausur.
In: Der Mathematikunterricht, Heft 1 1993.

Aspetsberger, Klaus: Der Einsatz von computeralgebra-tauglichen Taschenrechnern im Mathematikunterricht – Ein Erfahrungsbericht.
In: Mathematische Bildung und neue Technologien. Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt. Teubner, Stuttgart 1999.

Bauer, Ludwig: Mathematische Denkfähigkeiten. Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. Paderborn 1978.

Bender, Peter: Mathematik-didaktische Paradigmen und Computer – unter besonderer Berücksichtigung der Geometrie.
In: Mathematische Bildung und neue Technologien. Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt. Teubner, Stuttgart 1999.

Drivers, Paul: Assessment and New Technologies: Different Policies in Different Countries.
In: Der TI 92 im Mathematikunterricht. Tagungsdokumentation der Pfingsttagung 1998, ZKL-Texte Nr. 7. Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Ebenhöh, Mechthild: Straßenbau im Abitur. In: mathematik lehren, Heft 78 (1996).

Herget, Wilfried: Mathematikunterricht – wie geht es weiter?
In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM. Franzbecker, Hildesheim 1991

Herget, Wilfried: Mathe-(Klausur-)Aufgaben einmal anders ?!
In: Hischer, Horst (Hrsg.): Wieviel Termumformung braucht der Mensch? Bericht über die 10. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM. Franzbecker, Hildesheim 1991

Herget, Wilfried: „Die alternative Aufgabe“ – veränderte Aufgabenstellungen und Lösungswege mit/ trotz Computersoftware.
In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht und Computer. Neue Ziele oder neue Wege zu alten Zielen? Bericht über die 11. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM. Franzbecker, Hildesheim 1994

Heugl, H./ Klinger, W., Lechner, J.: Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen. Addison-Wesley, Bonn 1996.

[26] In verschiedenen Diskussionen, auch in Münster.

Knechtel, Heiko: LK Mathematik mit dem TI 92.
In: Der TI 92 im Mathematikunterricht. Tagungsdokumentation der Pfingsttagung 1998, ZKL-Texte Nr. 7. Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Lehmann, Eberhard: Zwei Gesichter einer Aufgabe. In: TI-Nachrichten 1/99.

Meyer, Hartmut/ Klingen, Leo/ Hehl, Friedrich W.: Computer-Algebra auch in der Schule? Formelmanipulationssysteme für Mathematik und Naturwissenschaften. In: MNU 8/92.

Meyer, Jörg; Winkelmann, Bernhard: Arbeitsgruppenbericht Prüfungsaufgaben trotz Derive. In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM. Franzbecker, Hildesheim 1991

Ministerium für Bildung und Kultur Rheinland-Pfalz: Handreichung zum Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach in der Oberstufe des Gymnasiums (Mainzer Studienbriefe). Der Computer als Werkzeug im Mathematikunterricht. Worms 1992.

Richtlinen und Lehrpläne für die Sekundarstufe II - Gymnasium/ Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen. Ritterbach Verlag, Frechen 1999.

Scheuermann, Hellmut: Computereinsatz im anwendungsorientierten Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim 1998.

Schnegelberger, Maren: Zum Einfluß symbolverarbeitender Software auf den Analysisunterricht – Analyse von Abituraufgaben und empirische Befunde.
In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der GDM. Franzbecker, Hildesheim 1991

Weigand, Hans-Georg; Weth, Thomas: Das Lösen von Abituraufgaben mit Hilfe von Derive. In: MNU, Heft 3 1993.

Weigand, Hans-Georg: Ein Blick zurück, um besser nach vorn schauen zu können. In: Computeralgebra im Mathematikunterricht. In: Tagungsdokumentation. ZKL-Texte Nr. 6. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1998.

Weigand, Hans-Georg: Was können wir aus der Vergangenheit für den zukünftigen computerunterstützten Mathematikunterricht lernen? 10 Thesen.
In: Mathematik in der Schule 6/1997.

Wilding, Hans: Interaktive Lernumgebungen im Unterricht. Das Lernsystem MathSchoolHelp 98. In: Mathematische Bildung und neue Technologien. Vorträge beim 8. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt. Teubner, Stuttgart 1999.

Wurnig, Otto: Mathematik-Schularbeiten mit PC/TC - Variationen, Erfahrungen, Probleme. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1999. Franzbecker, Hildesheim 1999.

Wynands, Alexander: Abiturklausuren in Mathematik von 1960 bis 1992.
In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1995. Franzbecker, Hildesheim 1995 und in: Mathematik in der Schule 11/1995.